

## 歯科疫学統計

### — 第2報 一般化線形モデルの意義と潮流 —

瀧口 徹

## A review of oral epidemiological statistics

### — Part II: New trends in statistical methods-the Generalized Linear Models (GLIM) —

Toru Takiguchi

要旨：第2報では1989年に開発されて普及してきた正規分布のみを前提とせず最適のモデルを選択する優れた手法である一般化線形モデルの意義と潮流について概説した。細目は1. GLIM：一般化線形モデル利用の時代変遷、2. GLM：一般線形モデルとGLIM：一般化線形モデルの違い、3. モデル選択の原則論、4. GLIM法利用に当たってのキーワード、および5. GLIM解析の例題、である。

キーワード：最尤法、一般線形モデル、一般化線形モデル、AIC基準、デビアン

#### はじめに

第1報で各種統計分布の特徴と利用に際しての注意点について概説し、各種多変量モデル利用の時代変遷を解説した。第2報においてはより厳格な統計分布への適合を統一的に行う一般化線形モデル：GLIMの概念と実例を通して利用の要点について概説する。

#### 1. GLIM：一般化線形モデル利用の時代変遷

GLIM：一般化線形モデル<sup>1)</sup>(以下、GLIM)は1989年にP.McCullagh(シカゴ大学)とJ.A.Nelder(英国王立科学技術大学)によって開発さ

れた。第1報の表5,6と同様のPubMed検索による方法でGLIM法利用の時代変遷を調べ表1を得た。1989年の開発以来増加してきているが、その絶対数は2004年9月30日までの総数で126と決して多くない。歯科保健・医療に関しては本検索ではインプラントに関してわずか2例<sup>2,3)</sup>あるだけであった。この理由については特段解説しているものは見あたらないが、著者の推定としては下記と

表1 GLIM：Generalized Linear Modelsによる解析使用頻度の時代変化

— 1970年1月1日～2000年9月30日 —  
— メディカル・データベース Pub Med による —

		Generalized Linear Models
年平均新規 文献登録数	1970年代	0.0
	1980年代	0.4
	1990年代	6.9
	2000年代 ※	14.5
実際の文献総数 ※ 1970/1/1～2004/9/30		126
歯科保健・医療関連文献総数		2

注1) GLIMは1989年にP.McCullagh(シカゴ大学)とJ.A.Nelder(英国王立科学技術大学)によって開発された。

注2) GLIMの略称は従来のGLM: General Linear Models(一般線形モデル)と紛らわしさを避けるためのものであるが、解説書によってはGLM(またはGLMs, GLZ)と呼ばれることも多い。

#### 【著者連絡先】

〒341-0003 埼玉県三郷市彦成3-86

深井保健科学研究所

主席研究員 瀧口 徹

TEL&FAX：048-957-3315

E-mail：taki8020@math.biglobe.ne.jp

思われる。

- ①GLIM法の手順は容易であるが意義と結果の解釈が難解であること
- ②GLIM法のFamilyがbinomialでLinkがlogitの組み合わせ、すなわちロジスティック回帰分析モデルのコンピュータ統計ソフトが世界的に普及しているが、それ以外の組み合わせのソフトの普及が極めて遅いため多くの研究がロジスティック回帰分析モデルで行われていること
- ③研究者が最適統計分布選択の曖昧さが引き起こす問題点に寛容であること

ここで最も重要なことは③である。例えば第1報で解説したように正規分布の近似式としてのロジスティック分布はあくまでも左右対称型であり歪度は0である。しかし二項分布、ポアソン分布の歪度は0ではない（nが極大になるなど条件によっては0に近似するが）。すなわち左右対称型でない。このことを解析上どう考えるかということである。極めて多くの事象が概ね釣鐘状の分布をするから正規分布を前提として分析を行うということの汎用性は高い。しかしながら第1報で例示した企業メールの分布、台風の本土上陸数の分布の場合は正規分布と考えると確率予測に大きな狂いを生じる恐れがある。特に実際の分布の両裾で平均値から離れた位置にある事象をどう考える

※一般線形モデルと一般線形化モデルの略語について

一般線形化モデル(Generalized Linear Models)は開発者の教科書<sup>1)</sup>においてGLMsと略されている。しかし統計ソフトSPSSにおいてはGLMモデルとは一般線形モデル (General Linear Model) を指し、一方統計ソフトSTATAにおいては一般線形化モデルをGLMとGLIMの両方で表している。このように両者は非常に紛らわしいので後者をGLZと略することもある。本総説では一般線形化モデル (Generalized Linear Models) の略語はSPSS辞典<sup>4)</sup>で紹介しているGLIMを用いた。

表2 General Linear Model から Generalized Linear Models へ

<p><b>General Linear Model</b> の構成</p> <p><b>GLUM: General Linear Univariate Models</b></p> <p><b>MRA: Multiple Regression Analysis</b> :重回帰分析</p> <p><b>ANOVA: Analysis of Variance</b> :分散分析</p> <p><b>ANCOVA: Analysis of Covariance</b> :共分散分析</p> <p><b>GLMM: General Linear Multivariate Models</b></p> <p><b>GLMM: General Linear Multivariate Models</b></p> <p><b>MANOVA: Multivariate Analysis of Variance</b> :多変量分散分析</p> <p><b>MANCOVA: Multivariate Analysis of Covariance</b> :多変量共分散分析</p> <p><b>DFA: Discriminant Function Analysis</b> :判別分析</p> <p><b>PCA: Principal Components Analysis</b> :主成分分析</p> <p><small>注)上記2つのモデルの前提となる仮説は(多変量)正規分布および均質な分散</small></p>
---

かということはこれからのレディメードの保健・医療の重要なテーマであろう。

## 2. GLM：一般線形モデルとGLIM：一般化線形モデルの違い

表2に従来型のGLM：一般線形モデルの代表的なものの分類を示した。分散分析、重回帰分析、判別分析、主成分分析等はいずれも(多変量)正規分布および均質な分散を前提としている。対数利用による線形化は計算のし易さ、結果の理解し易さのためであり、従来型の最も大きな特徴は前提として分布を固定して考えている点である。なお、この表には記載されていないがt検定、 $\chi^2$ 検定等も広義では従来型のモデル解析である。

これに対してGLIM法<sup>1)</sup>は従来の線形モデルにおける実際値とモデル式との間のズレ、すなわち誤差項 (the sum-of-squares discrepancy) に仮定されていた正規分布の枠組みを外し、様々な分布をする確率変数に対しても統一的な線形推測が可能となるようにしたものである。

## 3. モデル選択の原則論

P.McCullaghとJ.A.Nelderはその著書<sup>1)</sup>の中でモデル解析に際しての次の3つの原則を提示している。

第1の原則：(極論すれば)全てのモデルは間違いとも言えるが、より有用なモデルを探すことこそが重要である。同時

に永遠の真実は我々の手中に無いことを認識しなければならない。

**第2の原則：**（芸術家にも当てはまるが）唯一のモデルに固執（fall in love with one model）して他の方法を除外してはならない。

**第3の原則：**例えば分布中心からかなり離れた位置にある観測値に対して残差を調べ、かつ別の統計手法による統計量の適合度を調べる等の方法で、ある1つのモデルのデータ適合度を厳密に検証することが推奨される。

上記のような診断手順はいまだ完璧には公式化されていないし、恐らくこれからもされないであろう。非常に重要かつ非常に疑わしいモデルの外観を決定するためにはある種の想像力もしくは内省（introspection）が必要である。

第1報の台風の本土上陸数分布の例でいえば、正規分布だけあるいは二項分布やポアソン分布だけを単独適用すればいずれも差が有意でなくそれぞれの分布が「その分布ではない」と言えないことになる。しかし3つの分布を比較することによって正規分布は相対的に適合が悪いことが判明した。また、分布の端の観測値である上陸数0はポアソン分布あるいは二項分布では確率的によく説明がつくが2004年の10回本土上陸はいずれの分布でも全く説明がつかないことが判明した。これら一連の分析結果と解釈は上記の原則に奇しく

も概ね合致しているといえるだろう。

4. GLIM法利用に当たってのキーワード

1) FamilyとLink

表3にGLIM法の適用分布の選択手順に欠かさないFamilyとLinkの関係を示す。ここでFamilyは正規分布、二項分布、ポアソン分布等の母数（母集団の平均値、標準偏差、歪度、尖度等）の違いのため名称を異にする分布の種類を、一方Linkはlog変換、logit変換（ $\log(p/(1-p))$ ）等、線形式にするための（母数の性格を異にしない）変換法の種類を指す。例えば対数正規分布の場合はFamilyは正規分布（normal dist=Gaussian）、Linkはlogとなる。次に図1に実際のFamily,Linkの適用画面の例（統計解析ソフト STATA 8.2 Texas大学）を示す。この画面でbinomial（二項分布）のLinkは目的変数が2値（0,1等）の場合のみに適用される。FamilyがGaussianでLinkがidentity(基本分布)の場合、係数等計算結果は従来の（線形）MRA:重回帰分析に一致する。またLinkの選択肢powerはベキ乗を含む多項式モデルであり、2,3等の乗数値を指定する。

2) 尤度と最尤法(Likelihood, MLE:Maximum Likelihood Estimate)

尤とは「尤もらしい」、最尤とは「最も尤もらしい」という意味である。GLIM法においても極めて重要な統計確率の概念である尤度（likelihood）は分散分析法(ANOVA)開発者で有名なR.A.Fisherによって研究開発された。この尤度もまた事象の

表3 Generalized Linear Models とは？

**GLIM: Generalized Linear Models**  
**Family:** 正規分布、二項分布、ポアソン分布等の統計分布の種類  
**Link:** : Canonical Link Functions: = log変換, logit変換等モデルの両辺を加工する方法の種類

GLIMモデルは正規分布等の固定分布を前提とはせず最尤値もしくはネステッド・モデル<sup>※</sup>におけるdeviance差の比較によって選択される。

※ モデル1=変数:A+B+C モデル2=A+B+C+D+E の場合、モデル1はモデル2の入り子の関係にある。このような関係にあるモデルをネステッド・モデルという。この二つのモデルのデビアンس差は自由度が固定された未知母数の数と等しい自由度を持った $\chi^2$ 分布に漸近的に従うことを利用してモデルの変数選択を行うことができる。

GLIM: Generalized Linear Models Family

Canonical links	Gaussian <sup>※</sup>	Inverse Gaussian	binomial	Poisson	negative binomial	gamma
identity	○	○	○	○	○	○
log	○	○	○	○	○	○
logit			○			
probit			○			
c-log-log			○			
power	○	○	○	○	○	○
etc.	?	?	?	?	?	?

← データが0,1のように2値の場合

※ Gaussian:ガウス分布=正規分布

図1 Generalized Linear Models とは？

発生する確率 (probability) である。ならばなぜ確率といわないか。「雨が降る確率が高い」あるいは「雪が降る確率が高い」と「雨になるだろう」、「雪になるだろう」という和文を英訳すると前者には probability が後者には likelihood が向いているであろう。文章としての意味からは likelihood の語感はやや曖昧さを否めない。しかし Fisher の定義はその意味ではなく、予め統計分布が決められていて、諸条件を代入して計算されるのが確率であるが、尤度は分布の母数を観測値から推定し、推定された統計分布 (いつでも正規分布とは限らない) から確率計算する方法である。予測精度は観測精度次第であり 10 年間の観測値から母数を推定する場合と、ここ 1 週間の天気から推定する場合では確率が全く違って来る。よっていい加減かというところではない。例えば砂漠地帯と熱帯雨林地帯に我が国の気象の分布を機械的に当てはめて確率計算するとどうなるかを想像していただければ見るも無惨に予測がはずれることは請け合いです。

上記のことを数学的に説明するために図2「最尤法を理解するための思考実験」を示す。図の詳しい解説は省略するが、母数は一般に不明であるということが重要である。従って母数不明の場合確率であろうと尤度であろうと観測値から計算する以外に母数を推定する方法はない。しかし最尤法は母数を固定しないで変数扱いする点が確率予測と全く違う点である。図2において「母集団の

黒玉の比率の平均値が実際には0.3だったとしたらその倍の比率 (0.6) で抽出される確率はいくらか」という母数既知の問題設定の場合と「この出玉で推定される母集団の黒玉比率は幾つが最も尤もらしいか」という母数未知の問題設定の違いが確率予測と最尤法予測の違いである。

表4にはこの最尤法を用いた最尤推定値: MLE の求め方の例および表5には一般化した方法、すなわち母数を変数とし観測値を定数として対数変換後偏微分する方法を解説してある。多くの場合両辺を対数変換してから微分の方が計算が容易である。この例のMLE (母集団の平均値の推定値) は0.6となる。実際の計算では関数は複雑で簡単に公式を用いた微分ができないためテーラー展開等を繰り返し使用して近似値を求める手法をとる。後述するNewton-Raphson法はGLIM法において基本的な近似値計算法になっている。

3) AIC : Akaike's Information Criterion

表4 母数のうち平均値の最尤法による推定: Maximum Likelihood Estimate : MLE

**The likelihood function (尤度関数)**  
 $L(p) = p^6 q^4 = p^6 (1-p)^4$  ①

step1. L(p)の最大値を簡便に得るため自然対数を①式の両辺に適用  
 $\ln L(p) = 6 \ln p + 4 \ln(1-p) \quad 0 < p < 1$  ②

Step2. ②式の両辺をpで微分: differential

$L(p)/L(p) = 6 \times 1/p + 4 \times (-1)/(1-p)$	$L'(p) = L(p) \times (6/p - 4/(1-p))$
$L'(p) = p^5(1-p)^4 \times (6/p - 4/(1-p))$	$L'(p) = p^5(1-p)^5(6 - 4 \cdot 10/p)$
$L'(p) = p^5(1-p)^5(6 - 10/p) = 0$	

推定平均値  $p = 6/10 = 0.6$   
 →MLE

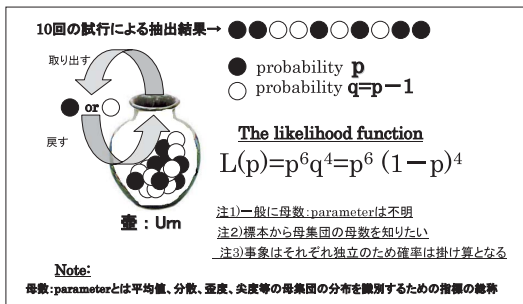


図2 最尤法を理解するための思考実験  
Unknownの壺から玉を繰り返して取り出す場合

表5 対数尤度関数: The logarithm of the Likelihood Function

Step1. 尤度関数: The likelihood function

$$L = \prod_{i=1}^n f(X_i | \theta) = f(X_1 | \theta) f(X_2 | \theta) \cdots f(X_n | \theta)$$

Step2. log-likelihood function と  $l < 0$  と  $a < b$

$$\text{Log} L = \sum_{i=1}^n \log f(X_i | \theta) = 0$$

Step3. 上記式を  $\theta$  で偏微分: partially differentiating  $\theta$

Note:  
未知母数  $\theta$  を例えば正規分布として予め規定した場合には「確率」という言葉を使うのに対し、逆にサンプルのXiを固定して母数  $\theta$  を変数として計算して出た結果を「尤度」と区別する。分散分析の開発したことで知られるR.A. Fisherが開発し名付けた。これも確率であることには違い無い。

赤池の情報量規準、略してAIC基準<sup>5, 6, 7)</sup>という。線形、非線形統計モデル開発において変数選択の適否を判断する基準となる。回帰分析の変数選択のように変数の個数が増えるほど当てはまりの指標である残差平方和は小さくなる。このため、変数の個数が異なるモデル間でのモデルの良し悪しを比較するためには残差平方和は不適である。モデル選択の基準として赤池の提案した AIC 規準では  $AIC = -2 \log(\text{最大尤度}) + 2(\text{説明変数の数} + 1)$  が最小になるモデルを最適とするものであり、新たな変数を加えたとき AIC 値が小さくなれば「従属変数の推定のための関数に導入する変数のノイズ情報と比べてプラスの情報が多い」と判断する。重回帰分析の場合は変数選択基準  $Fin = Fout = 2.0$  で AIC が最も小さくなる。現在モデルの適否判断において国際的に最も標準的に使われている。

#### 4) デビアンズ (deviance)

Deviance (差) : デビアンズはもともと逸脱とか乖離、偏差値を表す言葉であるが、P.McCullagh と J.A. Nelder<sup>1)</sup> によって提案されたモデル適合度を評価する指標である。仮定したモデルと完全なモデルとの最大対数尤度の差の-2倍で定義される尤度比検定統計量である。デビアンズは、実測値とモデルとの誤差が必ずしも正規分布ではない場合に、誤差平方和 (残差平方和) の代わりに用いるモデル選択の指標となる。疫学調査等で「ネスト化した影響評価モデル」の中から、データに、より適合するモデルを選ぶためのモデル選択指標として利用されている。ネストモデルの変数の出し入れはデビアンズ差が  $\chi^2$  分布することを利用して決める。正規分布を画一的な前提とせず、例えば大気汚染と死亡率との関係の分布に適合する分布モデルを探す研究<sup>8)</sup> において、また医療用放射線の影響に関する研究<sup>9)</sup> 等に広範囲に使用されている。

### 5. GLIM 解析の例題

#### 1) 統計モデル解析の前に

GLIM法を行うために仮説モデル：目的変数＝

複数の説明変数の合成変量を考える。複数の説明変量は目的変数と単相関係数の絶対値が大きく、しかも説明変量間では出来るだけ相関が低い (独立性が高い) ものがいいが、このような複数の変数を最初から設定するのは至難の業である。また仮に少数の互いに独立性の高い変数を設定でき、かつ生物学的な妥当性が高いと考えられる場合でも、背景に交絡因子 (confounding factor) があるとモデルの要素として設定した変数のみでは予測や要因分析結果に看過出来ない歪みが生じる。例えば食事の品目と疾患との関係では多くの交絡が生じることが知られている。ある研究で牛乳摂取が特定の疾患発生を抑制するようにみえても食品にはその組み合わせに補完と競合関係があり、時に交絡因子として作用し結果を事実以上に強調したり、逆に弱めたりする。すなわち牛乳、パン、バター、ジャム、ソースの組み合わせは互いに補完関係があり、また米飯、みそ汁、漬物、海苔、醤油の組み合わせも同様であるが、例えば牛乳と漬物、牛乳とみそ汁、牛乳と海苔、牛乳と醤油は競合関係がある。こうした場合、初めから牛乳を単独で疾病抑制因子としてモデル化するのは危険である。そこで何らかの方法で事前に探索的な解析を行う必要がある。探索的な解析は記述疫学の目的と同じで仮説を作るためと交絡因子を予め検出しておくためである。本稿では既に著者らが発表<sup>10, 11)</sup> している成人の咀嚼機能阻害要因分析を例題として取り上げることにする。咀嚼機能正常群と障害群に係わる要因分析で加齢と冷水敏が大きいことが示された研究であるが、ここでは新たに相加効果 (冷水敏+歯牙動揺+食物圧入) および相乗効果 (冷水敏×歯牙動揺×食物圧入) の有意性を検証することを例題としての目的とした。その他、変数項目、対象等は表6および文献を参照されたい。その結果表7に示すように21変数を用いた変数増減法 (Stepwise method) による MRA : 重回帰分析を行い、通法である係数の有意性の基準  $Fin = Fout = 2.0$  の条件下で6変数が選択された。GLIM法で扱う非線形変数増減法<sup>12)</sup> も研究されてきているが、まだ一般的でない。また

stepwise法によって変数を減らし情報圧縮 (parsimony) することそのものに否定的な見解<sup>13)</sup>も以前からある。さらに本稿<sup>4)</sup> デビアンスの項で解説したように重回帰分析のstepwise法は残差平方和の正規分布を前提としているので本例題では正規分布の硬い枠を外すため、stepwise法で選択された変数をあくまでも咀嚼機能障害要因モデルの要因候補あるいは交絡因子候補として扱うこととした。検証すべき相乗効果を加え、また多くの分析で交絡因子になる性を加えた8要因で一般化線形モデル：GLIMを構築した。表8に本題のGLIM

表6 探索的方法による分析 方法

<p>対象：中華人民共和國某省の1992年時の20-69歳の映画産業労働者男女594名 当初の目的：成人の咀嚼機能障害に関わる要因分析、特に加齢の影響について 目的変数：中国版山本式咀嚼機能判定表による咀嚼しづらい食品の有無 説明変数：21変数 方法：Stepwise <math>F_{in}=F_{out}=2.00</math></p> <p>&lt;全身的指標&gt;①性、②年齢(20-69歳)、③身長、④体重、⑤BMI指数、⑥最高血圧、⑦最低血圧、</p> <p>&lt;歯科的指標&gt;⑧D指数、⑨M指数、⑩F指数、⑪DMFT指数、⑫現在歯数(智歯を含む)、⑬CPI齲蝕指数、⑭歯石沈着量、</p> <p>&lt;生活習慣指標&gt;⑮飲酒量、⑯喫煙量、</p> <p>&lt;歯科関連不定愁訴&gt;⑰食物圧入の有無、⑱冷水敏の有無、⑲歯牙動揺の有無、 ⑳相乗効果：⑰×⑱+⑳、㉑相乗効果：⑰×⑱×⑳</p>
---

表7 探索的方法による分析 結果

<p><math>R=0.456</math> <math>R^2=0.208</math></p> <p>Durbin-Watson 統計量=2.016</p> <p>重回帰式の係数の有意性</p> <p>②年齢 <math>t=4.72</math> *** ④体重 <math>t=-1.69</math> * ⑪DMFT指数 <math>t=3.03</math> ** ⑮飲酒量 <math>t=1.84</math> * ⑱冷水敏の有無 <math>t=2.89</math> ** ⑳相乗効果：⑰+⑱+⑳ <math>t=2.62</math> **</p> <p>注) Durbin-Watson統計量:DWは0&lt;DW&lt;4の範囲にあり、2に近いほど残差の相互の独立性が高い(自己相関が無い)適性な重回帰モデルであることを示す。2より小さい時は、正、2より大きい時は負の自己相関を示す。特に循環変動等が起きる時系列解析で要注意である。</p>	
--	--

表8 モデルによる分析 方法

<p>対象：1. 探索的方法による分析と同じ</p> <p>方法： 1. 探索的方法で得られた6要因に性、相乗効果を加え、咀嚼機能発現モデルを作成</p> <p>2. GLIM法の適用 Family → binomial Link → identity, log, logit, probit, c-log-log, power(2乗)</p> <p>3. Deviance差によるモデルの確定</p>
---

法の適用を示す。目的変数は咀嚼機能障害の有無で2値(0,1)のためFamilyはbinomial：二項分布である。前述の統計解析ソフト stataを用いてLinkはidentity：通常二項分布、log、logit、probit、c-log-logおよび2乗式：powerの6種を比較した。その結果を表9に示す。logitのAICの値が最小になり選択される。但し本番の解析では丹後ら<sup>7)</sup>の提唱する「機械的選択を避ける」配慮が必要となる。表10、表11はLinkがidentityとlogitの場合のアウトプットを示す。表11の結果表にあるdeviance差を用いて表12に示すネステッド・モデルの変数選択を行った。その結果は年齢(p=0.0000)が最大要因、次いで冷水敏の有無(p=0.0000)、DMFT指数(p=0.0004)、相加平均(0.0096)で統計学的に高度に有意であった。飲酒量と体重はいずれもp>0.05でモデルから外された。相乗効果および性もpが0.58-0.76と大きくモデルから外された。以上、結論として成人の咀嚼機能障害モデルは4要

表9 二項分布：binomial分布における最適LINKの選択

LINK	年齢	冷水敏の有無	DMFT指数	不定愁訴3項目相乗効果 <sup>1)</sup>	AIC <sup>2)</sup> (=AIC*n)	Newton-Raphson収束:convergence <sup>3)</sup>
identity	z 3.89 p 0.000	2.36 0.019	4.19 0.000	2.74 0.006	1.1311	収束せず
log	z 2.94 p 0.003	2.15 0.032	3.49 0.000	2.04 0.041	1.1542	収束せず
logit	z 4.18 p 0.000	2.68 0.008	3.21 0.001	2.58 0.010	1.1151	収束
probit	z 4.17 p 0.000	2.62 0.009	3.37 0.001	2.67 0.007	1.1171	収束
c-log-log	z 3.88 p 0.000	2.50 0.013	3.49 0.000	2.68 0.007	1.1270	収束
power	z 計算不能 p 計算不能	"	"	"	5.5870	収束せず

表9の注釈

<p>Note: *1 相乗効果・相乗効果 組み合わせによる足し算効果。この分析の場合は口腔関連不定愁訴のうち冷水敏の有無(0,1)+食物圧入の有無(0,1)+歯牙の動揺の有無(0,1)で最低、最高3となる数値。これに対して組み合わせによる掛け算効果を相乗効果という。相乗効果より影響が強い場合の効果。本分析の場合はべき乗で2乗効果となる。例えば2<sup>2</sup>=1、2<sup>2</sup>=2、2<sup>2</sup>=8で最低1、最高8となる数値。</p> <p>*2 AIC(Akaike's Information Criterion) 赤池の情報量規準。略してAIC基準という。線形、非線形統計モデル開発において変数選択の適否を判断する基準となる。重回帰分析の変数選択、多元回帰曲線の当てはめ等の場合、変数の個数が増えるほど適合度判定の指標である残差平方和は小さくなる。このため、変数の個数が異なるモデル間でのモデルの良し悪しを比較するためには残差平方和は不適である。モデル選択の基準として赤池の提案したAIC規準ではAIC=-2 log(最大尤度)+2(説明変数の数+1)が最小になるモデルを最適とするものである。単回帰式のみならず、多項式、指数関数等モデルを相互比較しその適否を判断する方法として現在ももっとも標準的かつ国際的に使われている。統計ソフトによってはAICは略語がAIC'nすなわち例数で割ってAIC/nになっているので注意を要する。(STATA8.2の場合はnで割ったAIC'n)</p> <p>*3 Newton-Raphson法 関数が単調連続で変曲点がなく、かつ導関数が数値的に求められる時に利用できる近似的に解を求める数値解法で、収束(convergence)が速く、広く用いられている。いま、任意の値x<sub>0</sub>に対応する曲線f(x)上の点y<sub>0</sub>、その接線、を求めその軸と交点x<sub>1</sub>に対応する曲線f(x)上の点y<sub>1</sub>での接線を求め、以下同様にして計算することで曲線f(x)とx軸との交点、すなわち漸近的に解が求まる。GLIM法：一般化線形モデルの基本手法である。</p>
---

表10 GLIMの結果 その1

1. Iteration 48: log likelihood = -326.87102 (backed up)	<b>Family</b> 二項分布
2. Iteration 49: log likelihood = -326.87102 (backed up)	
3. Iteration 50: log likelihood = -326.87102 (backed up)	<b>Link</b> 基本分布
4. convergence not achieved	
5. Generalized linear models No. of obs =584	
6. Optimization : ML-Newton-Raphson	Residual df =587
7. Scale parameter =	
8. Deviance = 883.742031	
9. Pearson = 593.2600131	
10. ariance function: V(u) = u*(1-u)	[Bernoulli]
11. Link function : g(u) = u	[Identib]
12. Log likelihood = -326.8710155	AIC =1.124145
13. BIC = -3095.358129	
14. 従属変数:	
15. 咀嚼機能障害の有無	係数 Std. Err. z p > z [95% Conf. Interval]
16. 年齢	.0070351 .0016253 4.33 0.000 .0038495 .0102207
17. 冷水飲の有無	.1670727 .0530177 3.15 0.002 .0631599 .2709854
18. DMFT指数	.0123839 .0029813 4.20 0.000 .0065995 .0181684
19. 相加効果	.0626167 .0266874 2.35 0.019 .0103691 .1148943
20. 飲酒量	.1051597 .0400941 2.62 0.009 .0265767 .1837427
21. 体重	-.0035454 .0015648 -2.27 0.023 -.0066124 -.0004784
22. 定数	.1516986 .1170141 1.30 0.195 -.0776448 .3810421

表11 GLIMの結果 その2

1. Iteration 0: log likelihood = -324.01000	<b>Family</b> 二項分布
2. Iteration 1: log likelihood = -323.16573	
3. Iteration 2: log likelihood = -323.16497	<b>Link</b> logit
4. Iteration 3: log likelihood = -323.16497	
5. Generalized linear models No. of obs =584	
6. Optimization : ML-Newton-Raphson	Residual of =587
7. Scale parameter =	
8. Deviance = 846.3298326	
9. Pearson = 602.2597631	
10. Variance function: V(u) = u*(1-u)	[Bernoulli]
11. Link function : g(u) = ln(u/(1-u))	[Logit]
12. Log likelihood = -323.1649883	AIC =1.111687
13. BIC = -3102.768228	
14. 従属変数:	
15. 咀嚼機能障害の有無	係数 Std. Err. z p > z [95% Conf. Interval]
16. 年齢	.0375899 .0091901 4.09 0.000 .0195776 .0556022
17. 冷水飲の有無	.3727866 .0693957 5.37 0.000 .2352883 .5102849
18. DMFT指数	.00965 .0285403 3.18 0.001 .034712 .1446588
19. 相加効果	.3784409 .1436511 2.63 0.008 .0968899 .6599919
20. 飲酒量	.4439725 .2400787 1.85 0.064 -.0265732 .1451182
21. 体重	-.0176675 .0103703 -1.70 0.088 -.0379929 .0026579
22. 定数	-1.834158 .7519167 -2.44 0.015 -3.307887 -.3604281

因による logit 変換した二項分布 (=logistic) が最尤モデルである。口腔に関連した不定愁訴の相加効果と相乗効果は前者が有意に存在することが判明した。なお、モデルの選択に関して変数増加法 (forward) を行う際は特に注意を要することを表13に示した。この場合、相加効果ではなく相乗効果がモデルの要素に選択されてしまっている。この理由は相加効果を変数としてモデルに挿入する前に相乗効果を挿入し、その上で相加効果の出し入れを deviance 差で判定したためである。こうした誤りを避けるために (重回帰分析以外の非線形では stepwise 法が用意されていない場合が多いので) 変数減少法 (backward) を選択し、係数の有意水準が小さい変数から逐次除外していくことによって回避される。

表12 GLIM法を用いたDevianceによるモデル選択 その1 -咀嚼機能モデルの変数の選択-

変数	d.f 差	Deviance (差)	p (χ <sup>2</sup> )	d.f	Residual Deviance
Null*				583	784.1272
1 年齢	1	72.0874	0.0000	582	712.0398
2 冷水飲の有無	1	40.4155	0.0000	581	671.6243
3 DMFT指数	1	12.5707	0.0004	580	659.0536
a 4 相加効果*	1	6.7011	0.0096	589	652.3525
5 飲酒量	1	3.0950	0.0785	588	649.2575
b 6 体重	1	2.9276	0.0871	587	646.3299
7 相乗効果*	1	0.3022	0.5825	586	646.0277
8 性	1	0.0946	0.7584	585	645.9331

表12の注釈

**Note:**  
 \*1 **Deviance(差)**: デビアンズ(deviance)は、統計モデルがデータにどの程度あてはまるかを示す尺度であり仮定したモデルと完全なモデルとの最大対数尤度の差の-2倍で定義される。デビアンズは、実測値とモデルとの誤差が必ずしも正規分布ではない場合に、誤差平方和(残差平方和)の代わりに用いるモデル選択の指標である。疫学調査等でネスト化した影響評価モデルの中から、データに、より適合するモデルを選ぶためのモデル選択指標として利用されている。正規分布を仮定しない前提とせずより適合する分布モデルを提示するGLIM:Generalized Liner Modelsにおいて中心的役割を果たす。  
 \*2 **Null Model**: 変数のない定数項だけのモデル。従属変数のみで独立変数がない分析から得られる。

表13 GLIM法を用いたDevianceによるモデル選択 その3 -相加効果か相乗効果かの判定 誤った手法例-

変数	d.f 差	Deviance (差)	p (χ <sup>2</sup> )	d.f	Residual Deviance
Null*				583	784.1272
1 年齢	1	72.0874	0.0000	582	712.0398
2 冷水飲の有無	1	40.4155	0.0000	581	671.6243
3 DMFT指数	1	12.5707	0.0004	580	659.0536
4 相乗効果	1	4.7039	0.0301	589	654.3487
5 相加効果	1	2.1495	0.1426	588	652.2002

おわりに

21世紀は100の症例を、ごく少数の類型に大別診断して治療する医療から社会学、心理学を加味した個別医療の動きへとニーズが医療側と住民側の両再度から高まってきている。従来保健・医療における統計分布解析は正規分布の頑健性を頼りに平均値からの差を最重視し診断の物差しとしてきた。しかし従来の分布解析の視点から脱却して分布中心 (注意すれば病気にならない人) から相当離れたケース、すなわち注意しなくても病気にならない人、注意しても病気になる人の科学的峻別等、分布の中心付近から両端にも視野を広げていく必要がある。そのために第1報で解説した各

種統計分布の相互関係と利用の潮流、第2報で解説した一般化線形モデルの意義と潮流が参考になれば幸いである。

謝辞：本総説を執筆するにあたりご指導いただいた歯科疫学研究会の顧問である重松逸造、蓑輪眞澄、高江洲義矩、境 脩、伊藤学而、佐々木英忠の各先生に深謝申し上げます。さらに貴重なご助言をいただいた深井獲博同研究会会長をはじめとする幹事の方々ならびに国立保健医療科学院の花田信弘部長、安藤雄一室長、東京医科歯科大学大学院植松 宏、川口陽子両教授に感謝申し上げます。

#### 文 献

- 1) P. McCullagh, J. A. Nelder : Generalized Linear Models. Chapman & Hall/CRC, USA., 2nd ed., 1999, pp. 30-31, 7-8, 33-36.
- 2) Richard S. Truhlar, Harold F. Moris, Shigeru Ochi : Stability of the Bone-Implant Complex. Results of Longitudinal Testing to 60 Months With the Periotest Device on Endosseous Dental Implants. Ann Periodontol. 5(1) : 42-55, 2000.
- 3) Joseph A. Toljjanic, Christopher B. Ward, Michael E. Gewerth et al. : Longitudinal Clinical Comparison of Plaque-Induced Inflammation Between Gingival and Perio-Implant Soft Tissues in the Maxilla. J Periodontol. 72(9) : 1139-1145, 2001.
- 4) 小野寺孝義, 山本嘉一郎編 : SPSS 辞典 - BASE 編一, ナカニシヤ出版, 東京, 2004, 59頁.
- 5) 杉山高一 : 多変量データ解析入門, 朝倉書店, 東京, 第1刷, 1983, 134-136頁.
- 6) 鈴木義一郎 : 現代統計学小辞典, 講談社, 東京, 第1刷, 1998, 12-13頁.
- 7) 丹後俊郎, 山岡和枝, 高木晴良 : ロジスティック回帰分析 SAS を利用した統計解析の実際一, 朝倉書店, 東京, 第1刷, 1996, 200-201頁.
- 8) Klemm RJ, Lipfert FW, Wyzga RE, Gust C. Inhal : Daily mortality and air pollution in Atlanta: two years of data from ARIES. Toxicol. 16 : 131-141, 2004.
- 9) Levegrun S, Hof H, Essig M, Schlegel W, Debus J : Radiation-induced changes of brain tissue after radiosurgery in patients with arteriovenous malformations: correlation with dose distribution parameters. Int J Radiat Oncol Biol Phys. 59(3) : 796-808, 2004.
- 10) 高德幸男, 瀧口 徹, 小林清吾ほか : 咀嚼機能に及ぼす加齢の影響について. 日本咀嚼学会誌4(1) : 41-50, 1995.
- 11) 瀧口 徹 : 8020地域歯科保健活動の現場から 第6章 咀嚼機能減退のリスク要因を考える, 日本歯科評論社, 東京, 第1刷, 2001, 186-192頁.
- 12) C. Huang, J. R. G. Townshend : A stepwise regression tree for nonlinear approximation : applications to estimating subpixel land cover. Int. J. REMOTE SENSING. 24(1) : 75-90, 2003. 9) Paul Lewus, Roseanne M. Ford : Temperature-Sensitive Motility of Sulfolobus acidocaldarius Influences Population Distribution in Extreme Environments. Journal of Bacteriology. 181(13) : 4020-4025, 1999.
- 13) 重松逸造, 柳川 洋, 秋葉澄伯ほか : 新しい疫学, (財)日本公衆衛生協会, 東京, 第1刷, 1991, 116頁.



## A review of oral epidemiological statistics

— Part II: New trends in statistical methods-the Generalized Linear Models (GLIM) —

Toru Takiguchi

(Fukai Institute of Health Science)

Abstract: The Generalized Linear Models (GLIM) were developed by P. McCullagh and J.A. Nelder in 1989, and are now widely accepted throughout the world as a sophisticated statistical method to get optimal goodness-of-fit for a distribution. The main purpose of GLIM is to counteract the uncritical and almost robotic application of normal distribution as the “king of all distributions” . To be sure, normal distribution is very useful for understanding almost all events in the fields of medicine and dentistry.

However, the thrust of both of medicine and dentistry will move dramatically from “ready-made medicine” toward “order-made medicine” in the near future-most likely within this century. In other words, far more attention will be given to preventive and treatment methods for special cases, i.e. those that are far removed from the population mean.

In this context, strict analysis of statistical distributions is essential for establishing new disease classifications and new preventive methods that are firmly grounded in evidence.

From this standpoint, important statistical concepts (e.g. maximum likelihood estimate, deviance, AIC-criterion, Family, and Link) and practical procedures using the statistical software "STATA" by Texas University are covered in Part 2 of this review.

Key words: the Maximum Likelihood Estimate, the General Linear Models, Generalized Linear Models, AIC-criterion, deviance

Reprint requests to T. TAKIGUCHI, Fukai Institute of Health Science, 3-86, Hikonari, Misato-shi, Saitama 341-0003, Japan

TEL:048-957-3315/FAX:048-957-3315/E-mail:taki8020@nth.biglobe.ne.jp